Springer-Lehrbuch

Gert Böhme

Algebra

Anwendungsorientierte Mathematik

6., verbesserte und erweiterte Auflage

Mit 245 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork
London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona

Professor Dr. GERT BÖHME
Fachhochschule Furtwangen/Schwarzwald
Fachbereich Allgemeine Informatik

Die 5., verbesserte Auflage erschien 1987 in der Reihe
»Anwendungsorientierte Mathematik« als Band 1

ISBN-13: 978-3-540-52676-6 e-ISBN-13: 978-3-642-97264-5
DOI: 13: 10.1007/978-3-642-97264-5

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Böhme, Gert: Algebra
Anwendungsorientierte Mathematik
6., verb. Aufl. - 1990
Berlin ; Heidelberg ; NewYork ; London ; Paris ; Tokyo ; Hong Kong ; Barcelona : Springer.
Früher u. d. T.: Böhme, Gert: Mathematik. NE: Böhme, Gert [Hrsg.]
(Springer-Lehrbuch)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1968, 1975, 1983, 1987, and 1990

Softcover reprint of the hardcover 6th edition 1990

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Satz: Macmillan India Ltd., Bangalore

2160/3020/543210 - Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort zur sechsten Auflage

Die nunmehr in der 6. Auflage vorliegende „Algebra“ ist in fast allen Abschnitten überarbeitet und um ein viertes Kapitel (Fuzzy-Algebra) erweitert worden. Anstöße lieferten die wissensbasierten Systeme mit den auf der Prädikatenlogik basierenden Programmiersprachen sowie die schnelle Verbreitung fuzzymathematischer Methoden in Planungs- und Wirtschaftswissenschaften, in der Praxis der Steuerungssysteme und der Fuzzy-Logik-Computer-Entwicklung, wie sie besonders in Japan vorangetrieben wird.

Hinsichtlich der didaktischen Gestaltung des Textes hatte die Verständlichkeit Vorrang vor allen anderen Parametern. Auch diese Auflage ist für Studienanfänger vornehmlich der Ingenieur-, Informatik- und Wirtschaftswissenschaften geschrieben. Viele Passagen gehören zum Schulstoff und sollten eigentlich bekannt sein. Sie werden hier noch einmal erläutert und zugleich in einen umfassenderen, strukturorientierten Zusammenhang gestellt. Wie schon die früheren Auflagen ist auch dieses Buch nicht etwa „aus meinen Vorlesungen hervorgegangen“, es sind vielmehr meine Vorlesungen und Übungen, die ich seit vielen Jahren regelmäßig für Informatikstudenten halte, in allen Einzelheiten und mit der Ausführlichkeit, die eine effiziente Vermittlung gebietet.

Für die inhaltliche Überarbeitung standen folgende Gesichtspunkte im Vordergrund: die enge Verwandschaft zwischen Mengenalgebra und Prädikatenkalkül, die vielseitigen Anwendungen der Relationenalgebra, eine stark exemplarisch betonte Behandlung der endlichen Gruppen und ihrer Darstellbarkeit, eine besonders ausführliche Behandlung der verknüpfungstreuen Abbildungen, die Entwicklung der Aussagenlogik als Modell der Booleschen Algebra mit besonderem Bezug auf die Formalisierung sprachlicher Strukturen, schließlich die lineare Algebra unter dem methodischen Aspekt der Lösung linearer Gleichungssysteme.

Das neu aufgenommene Kapitel Fuzzy-Algebra ist als konsequente Verallgemeinerung der klassischen Mengen- und Relationenalgebra aufgebaut. Die bekannten Konzepte werden übernommen, hier jedoch fuzzifiziert durch eine Mitgliedsgrad-Bewertungsfunktion der Elemente. Der auf Zadeh (1965) zurückgehende Ansatz besticht durch seine Einfachheit und Entfaltungsfähigkeit. Es war mir aber auch daran gelegen, den Zusammenhang mit den von Lukasiewicz (seit 1920) begründeten mehrwertigen Logikkalkülen aufzuzeigen, die nun für einen weiten Kreis von Anwendern zu neuer Geltung gelangen. Dies ist nicht mehr als ein erster Einstieg, aber er soll dem Leser eine Grundlage bieten, die es ihm ermöglicht, in späteren Spezialvorlesungen mitzuhalten.

Mit der Aufnahme in die Reihe der Springer-Lehrbücher erhielt die Neuauflage ein recht ansprechendes Design. Allen mit der Herstellung des Buches beteiligten Mitarbeitern des Springer-Verlages bin ich zu Dank verpflichtet. Frau Dipl.-Math. I. Kettern hat auch für diese Auflage interessante Anregungen gegeben und die Korrekturen mitgelesen. Schöne Anwendungen für Fuzzygraphen hat Herr Dipl.-Inf. N. Staiger beigesteuert. Nicht zuletzt bin ich Frau A. Klein für die mühevolle Anfertigung des Maschinenskripts sowie meiner lieben Frau für die sorgfältige Erstellung des Sachwortverzeichnisses herzlich verbunden. Über allem aber steht das Wort aus der Offenbarung 7, 12.

Furtwangen, im Juli 1990 Gert Böhme

Vorwort zur fünften Auflage

Der Text der vierten Auflage wurde einer gründlichen Durchsicht unterzogen und dabei Druck- und Rechenfehler beseitigt. Für entsprechende Hinweise und Vorschläge möchte ich Frau Dipl. Math. Ingeborg Kettern herzlich danken. Dem Springer-Verlag bin ich ein weiteres Mal zu Dank verpflichtet, daß er die neue Auflage schnell herausgebracht hat.

Furtwangen, im November 1986 Gert Böhme

Vorwort zur vierten Auflage

Die grundlegenden Begriffsbildungen der linearen und nichtlinearen Algebra haben seit dem Erscheinen der dritten Auflage ihren Platz in den mathematischen Anfängervorlesungen gefestigt. Die in der Hochschulliteratur sonst nicht übliche Ausführlichkeit der Darstellung ist von den Lesern und der Kritik durchweg positiv aufgenommen worden. Der Text wurde für diese Auflage um eine Einführung in die Graphentheorie sowie einige Beispiele und Aufgaben erweitert. Für wertvolle Anregungem bin ich Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Pelz und Herrn Prof. Dr. H.-V. Niemeier herzlich verbunden. Danken möchte ich auch allen Lesern, die mich auf Schreibfehler aufmerksam machten oder Vorschläge zur Verbesserung des Textes unterbreiteten. Dem Springer-Verlag danke ich für die zügige Herstellung der neuen Auflage.

Furtwangen, im Mai 1981 Gert Böhme

Vorwort zur dritten Auflage

In zunehmendem Maße gewinnen auch für den Anwender mathematischer Methoden algebraische Denk- und Verfahrensweisen an Bedeutung. Der Kreis der Geistesbereiche, welche sich der Exaktheit und Eindeutigkeit mathematischer Darstellungsformen bedienen, beschränkt sich heute längst nicht mehr auf die klassischen Natur- und Ingenieurwissenschaften, vielmehr ist das mathematische Instrumentarium auch in Wirtschaft, Organisation, Planung und Datenverarbeitung zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. Dieser Entwicklung muß die mathematische Grundausbildung unserer Ingenieure und Wirtschaftswissenschaftler Rechnung tragen.

Mit dem Titel „Anwendungsorientierte Mathematik" verbinde ich eine konkrete curriculare Konzeption. Sie unterscheidet sich sowohl von der rein theoretischen Darstellung als auch von der angewandten Mathematik, versucht jedoch zwischen beiden didaktischen Standpunkten eine Brücke zu schlagen. Dahinter steht die Erfahrung, daß sinnvolle Anwendung mathematischer Methoden sich nicht auf die verfahrenstechnische Komponente des Problems beschränken kann, sondern ein fundiertes Verständnis des wissenschaftlichen Kerns als notwendige Voraussetzung haben muß.

Im ersten Band sind die wichtigsten Teilgebiete der Algebra behandelt. Ihre Auswahl erfolgte nach anwendungsrelevanten Gesichtspunkten, ihre Darstellung orientiert sich nach Inhalt und Umfang an guter Lesbarkeit und leichter Verständlichkeit. Das bedeutet: bewußter Verzicht auf eine systematisch-geschlossene Abhandlung, Beschränkung auf eine Einführung bei Berücksichtigung relativ geringer Vorkenntnisse, Auflockerung des Textes durch möglichst viele Beispiele, Bezugnahme auf typische Anwendungen aus verschiedenen Gebieten, Veranschaulichung des Textes durch Abbildungen, Ergänzung der Theorie durch Übungsaufgaben (und Lösungen) zu jedem Abschnitt, womit ein Selbststudium des Buches erleichtert wird.

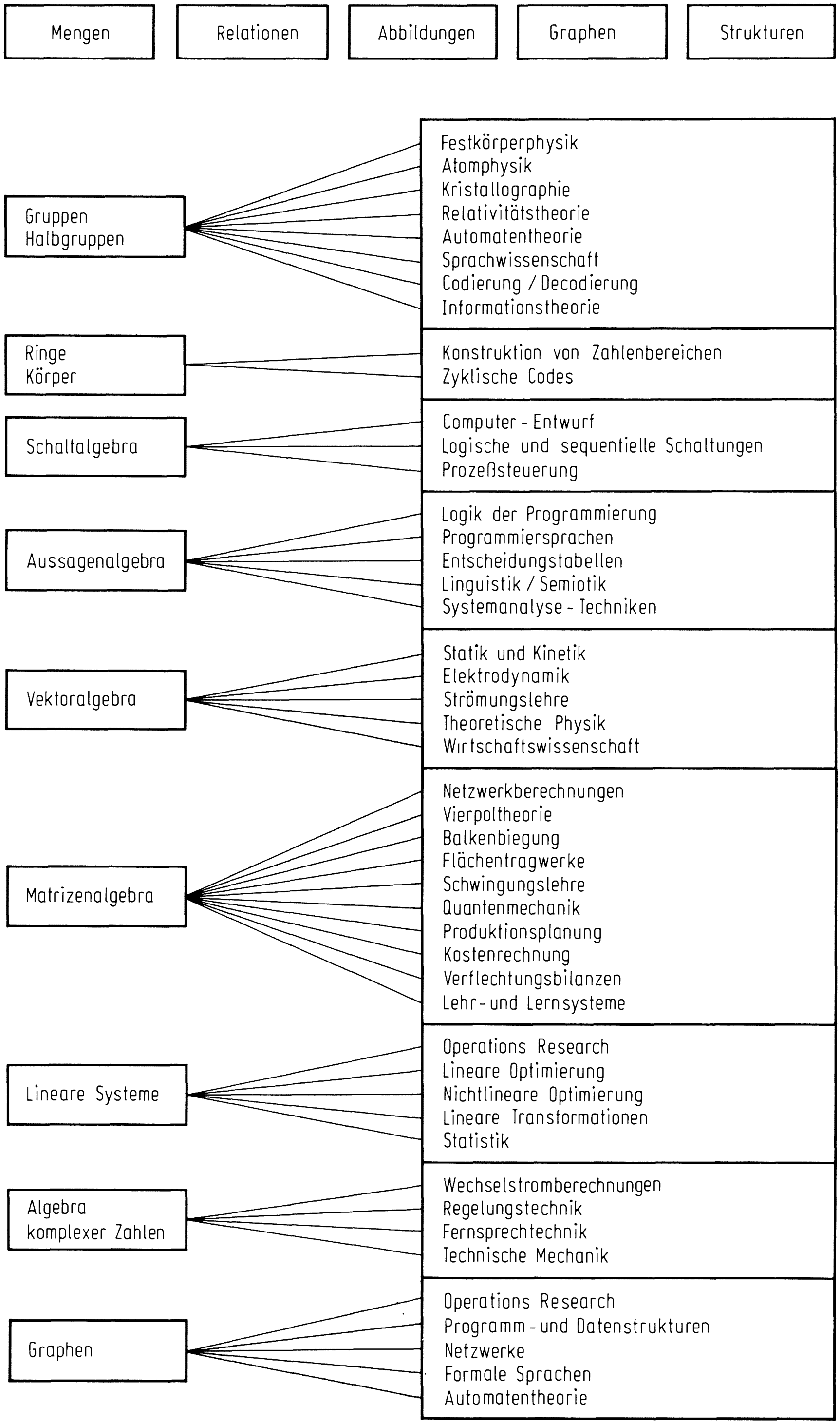
Um jedem Studienanfänger einen Einstieg in die Algebra zu ermöglichen, habe ich die einleitenden Abschnitte über Mengen, Relationen, Abbildungen, Verknüpfungen und Strukturen verhältnismäßig ausführlich gehalten. Diese Themenkreise gehören zwar nach der Reform des Mathematikunterrichts zum Lehrstoff aller Schulen bis zum Abitur, werden jedoch erfahrungsgemäß oft nur unvollständig behandelt. Insbesondere berücksichtige ich damit auch die bereits im Beruf stehenden Fachleute, die sich an Hand dieses Buches in die moderne Algebra einarbeiten wollen.

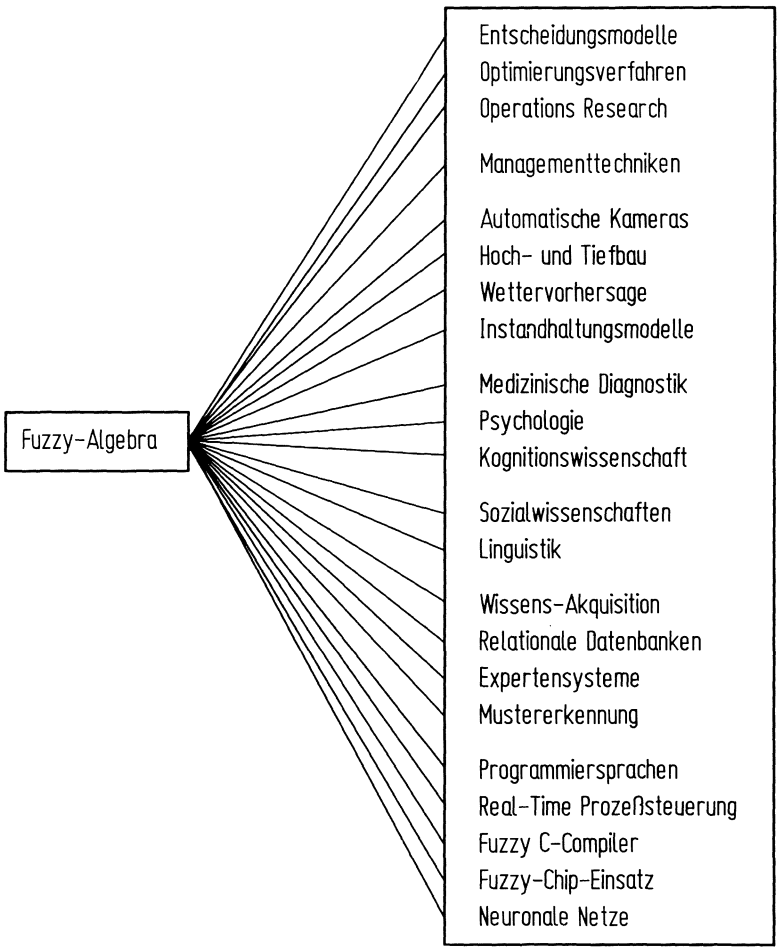
Von den Hauptkapiteln finden sich einige bereits längere Zeit in den Lehrplänen der Hochschulen, so etwa die Vektoralgebra, Schaltalgebra, Matrizenrechnung und die Algebra komplexer Zahlen. Sie werden auch hier gebührend behandelt, zugleich jedoch ergänzt und vertieft um einige weitere Themen wie Gruppentheorie, Boolesche und Aussagenalgebra sowie eine gründliche Einführung in die lineare Algebra. Letztere erscheint gemäß der Grundkonzeption dieses Werkes allerdings nicht als eine axiomatisch aufgebaute Theorie der Vektorräume -darüber gibt es genügend andere Veröffentlichungen-, sondern rückt die Behandlung linearer Gleichungssysteme in den Mittelpunkt, ergänzt durch eine Betrachtung linearer Ungleichungssysteme im Hinblick auf die Anwendungen in der linearen Optimierung.

Bei dieser Vielzahl von Einzelgebieten besteht für den Leser leicht die Gefahr, den Überblick aus den Augen zu verlieren und den Inhalt als eine Sammlung zusammenhangloser Einzeldarstellungen aufzufassen. Aus diesem Grund habe ich die Gesamtdarstellung unter einen hierfür geeigneten didaktischen Leitbegriff gestellt: den Begriff der algebraischen Struktur. Sinn und Zweck dieses Vorgehens habe ich in den einzelnen Kapiteln immer wieder transparent gemacht und an möglichst vielen Stellen auch durch konkrete Anwendungen untermauert. Der mündige Student erwartet heute von einer Lehrveranstaltung wie auch von einem guten Lehrbuch eine überzeugende Begründung der curricularen Relevanz des Lehrstoffes in wissenschaftlicher Sicht wie auch im Hinblick auf seine spätere berufliche Tätigkeit. Nicht zuletzt habe ich von daher eine Synopse von sinnvollen Anwendungsmöglichkeiten und wissenschaftlichem Selbstverständnis der Strukturalgebra angestrebt.

Für die Durchsicht des Manuskriptes bin ich Herrn Dr. Niemeier und Herrn Dipl.-Math. Ongyert zu Dank verpflichtet. Anregungen zum Text erhielt ich auch von Herrn Professor Dipl.-Ing. Simon. Meiner Frau bin ich für die mühevolle Anfertigung des Schreibmaschinenmanuskriptes auch dieser Auflage besonders herzlich verbunden. Schließlich habe ich dem Springer-Verlag für sein Verständnis bei der Konzeption der Neufassung sowie für die Summe der mit der Herstellung des Buches verbundenen Arbeiten zu danken.

Berlin, im August 1974 Gert Böhme


Mengen
Relationen
Abbildungen
Graphen
Strukturen
Gruppen Halbgruppen
Festkörperphysik
Atomphysik
Kristallographie
Relativitätstheorie
Automatentheorie
Sprachwissenschaft
Codierung / Decodierung
Informationstheorie
Ringe Körper
Konstruktion von Zahlenbereichen
Zyklische Codes
Schaltalgebra
Computer - Entwurf
Logische und sequentielle Schaltungen
Prozeßsteuerung
Aussagenalgebra
Logik der Programmierung
Programmiersprachen
Entscheidungstabellen
Linguistik / Semiotik
Systemanalyse - Techniken
Vektoralgebra
Statik und Kinetik
Elektrodynamik
Strömungslehre
Theoretische Physik
Wirtschaftswissenschaft
Matrizenalgebra
Netzwerkberechnungen
Vierpoltheorie
Balkenbiegung
Flächentragwerke
Schwingungslehre
Quantenmechanik
Produktionsplanung
Kostenrechnung
Verflechtungsbilanzen
Lehr- und Lernsysteme
Lineare Systeme
Operations Research
Lineare Optimierung
Nichtlineare Optimierung
Lineare Transformationen
Statistik
Algebra komplexer Zahlen
Wechselstromberechnungen
Regelungstechnik
Fernsprechtechnik
Technische Mechanik
Graphen
Operations Research
Programm - und Datenstrukturen
Netzwerke
Formale Sprachen
Automatentheorie



Fuzzy-Algebra
Entscheidungsmodelle
Optimierungsverfahren
Operations Research
Managementtechniken
Automatische Kameras
Hoch- und Tiefbau
Wettervorhersage
Instandhaltungsmodelle
Medizinische Diagnostik
Psychologie
Kognitionswissenschaft
Sozialwissenschaften
Linguistik
Wissens-Akquisition
Relationale Datenbanken
Expertensysteme
Mustererkennung
Programmiersprachen
Real-Time Prozeßsteuerung
Fuzzy C-Compiler
Fuzzy-Chip-Einsatz
Neuronale Netze

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Algebra

1.1 Mengen

1.1.1 Begriff und Beschreibung einer Menge

Für den gesamten Aufbau der Mathematik ist der Mengenbegriff von entscheidender Bedeutung. Nahezu alle mathematischen Begriffe lassen sich auf den Begriff der Menge zurückführen. Insofern durchdringt die Mengenlehre heute sämtliche mathematischen Disziplinen, erlaubt eine ökonomische und logisch präzise Beschreibung und gestaltet die Mannigfaltigkeit mathematischer Entwicklungen durchsichtiger und bis zu einem gewissen Maße einheitlich.

Aus der Vielzahl der Anwendungen seien neben Physik und Informatik besonders die Organisations- und Wirtschaftswissenschaften hervorgehoben. Strukturelle und system-orientierte Verfahrens- und Denkweisen haben auch in der Algebra logischer Schaltungen und der Künstlichen Intelligenz – Forschung neue Bereiche erschlossen.

Bei der Erklärung des Mengenbegriffs sei zunächst darauf hingewiesen, daß „Menge" ein mathematischer Grundbegriff ist, der sich nicht definieren läßt (wie „Punkt" in der Geometrie oder „wahr" in der Logik). Wir können jedoch eine Beschreibung geben, die sich an die ursprüngliche CANTORsche[1] Erklärung anlehnt. Danach soll unter einer Menge eine Gesamtheit von wirklichen oder gedachten Objekten verstanden werden, wenn vor der Zusammenfassung von jedem Objekt einwandfrei feststeht bzw. entschieden werden kann, ob es der Gesamtheit angehört oder nicht. Die Objekte heißen Elemente und werden im allgemeinen mit kleinen Buchstaben bezeichnet, während für Mengennamen große Buchstaben Verwendung finden. Wir schreiben

$a \in M$, falls a Element der Menge M ist
$a \notin M$, falls a nicht Element der Menge M ist

Es gibt drei Möglichkeiten zur Beschreibung einer Menge:

(1) durch eine (unmißverständliche) verbale Formulierung. Beispiel: M sei die

[1] G. Cantor (1845–1918), deutscher Mathematiker (Begründer der Mengenlehre)

Menge aller zum 1.1.1990 amtlich zugelassenen Kraftfahrzeuge in der Bundesrepublik Deutschland einschließlich West-Berlin.

(2) durch Angabe (Auflisten) sämtlicher Elemente. Die Namen der Elemente werden verabredungsgemäß von geschweiften Klammern eingeschlossen. Beispiel: $M = \{1, 3, 7, 10\}$.
Umfangreichere endliche Mengen werden in der Praxis durch Listen, Kataloge, Verzeichnisse etc. dargestellt: Telefonbücher, Gewinnlisten, Zahlentafeln, Zeichenvorräte usw. Vergleiche das Sachverzeichnis am Ende dieses Buches!

(3) durch Angabe einer Grundmenge G und einer als Auslesebedingung zu verstehenden Eigenschaft (*Prädikat*) P für die zur Menge gehörenden Elemente. Man schreibt

$$M = \{x \mid x \in G, Px\},$$

wobei die Variable x für die Namen der Elemente steht und M aus den und nur den („genau den") x bestehen soll, für die das Prädikat P erfüllt ist. Beispiel: Grundmenge G seien alle ganzen Zahlen zwischen 1 und 20, P das Primzahlprädikat; damit wird

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid x \in G, Px\} \\ &= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \end{aligned}$$

Es hat sich in der Fachliteratur eingebürgert, einige besonders häufig vorkommende Zahlenmengen mit Doppelstrich-Buchstaben zu bezeichnen:

die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$

die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \{x \mid x \text{ ist endlicher oder periodisch-unendlicher Dezimalbruch mit beliebigem Vorzeichen}\} \end{aligned}$$

die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist endlicher oder unendlicher Dezimalbruch mit beliebigem Vorzeichen}\}$$

die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{x \mid x = a + bj, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, j^2 = -1\}$$

Es kann vorkommen, daß die Eigenschaft (das Prädikat) für kein x erfüllt ist. Um solche Fälle nicht jedesmal ausschließen zu müssen, erklären wir eine Menge ohne Elemente.

Definition

Die Menge, welche kein Element enthält, heißt *leere Menge* $\emptyset$.

Leer ist beispielsweise die Menge aller negativen reellen Quadratzahlen:

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0\} = \emptyset$$

oder die Lösungsmenge L der Gleichung $x^2 - 3 = 0$ in der Menge der rationalen Zahlen:

$$L = \{x \mid x^2 - 3 = 0,\ x \in \mathbb{Q}\} = \emptyset$$

Wählt man $\mathbb{R}$ als Grundmenge, so wird dieselbe Gleichung lösbar, und man hat dann eine nicht-leere Lösungsmenge

$$L = \{x \mid x^2 - 3 = 0,\ x \in \mathbb{R}\} = \{\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\}\ .$$

Wegen der Abhängigkeit einer durch eine Eigenschaft (ein Prädikat) definierten Menge M von einer Grundmenge G ist die Angabe von G bei der Beschreibung von M immer dann erforderlich, wenn G nicht schon im Kontext erklärt ist. Die Schreibweise $M = \{x \mid x \in G,\ Px\}$ bringt bereits einen Zusammenhang zwischen Mengen einerseits und Prädikaten andererseits zum Ausdruck: bestimmten mengenalgebraischen Beziehungen/Verknüpfungen entsprechen bestimmte prädikatenlogische Beziehungen/Verknüpfungen. Diese Verflechtungen wollen wir jetzt näher untersuchen.

Aufgaben zu 1.1.1

1. Geben Sie die folgenden Lösungsmengen in aufzählender Form an:
   a) $\{x \mid x^2 + 2x - 15 = 0,\ x \in \mathbb{N}\}$
   b) $\{x \mid x^2 + 2x - 15 = 0,\ x \in \mathbb{Z}\}$
   c) $\{x \mid x^2 + 4 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$
2. Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Angabe wenigstens einer Eigenschaft (eines Prädikats) für x:
   a) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$
   b) $\{2, 11, 101, 1001\}$
   c) $\{1, -1\}$
3. Welche der folgenden vier Aussagen ist richtig:
   a) $3 \in \{3\}$; b) $\{3\} \in \{3\}$; c) $\{3\} \in 3$; d) $3 \in 3$?

Die Lösungen der Aufgaben findet man im Anhang des Buches.

1.1.2 Beziehungen zwischen Mengen

Bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte hat es sich als zweckmäßig erwiesen, bestimmte Formulierungen durch Verwendung logischer Zeichen zu formalisieren. Wir stellen die wichtigsten Symbole in einer Tabelle zusammen.

Zeichen	Bedeutung
$\wedge$	und; Konjunktions-Verknüpfung
$\vee$	oder (im einschließenden Sinne oder/und); Disjunktions-Verknüpfung
$\neg$	nicht; Negations-Verknüpfung
$\rightarrow$	wenn-dann; Subjunktions-Verknüpfung
$\leftrightarrow$	dann und nur dann-wenn (genau dann-wenn); Bijunktions-Verknüpfung
$\Rightarrow$	daraus folgt (einseitig); allgemeingültige Implikations-Beziehung, beweisbedürftig
$\Leftrightarrow$	daraus folgt (zweiseitig); allgemeingültige Äquivalenz-Beziehung, beweisbedürftig
$\Leftrightarrow:$	definitionsgemäß äquivalent; „:“ steht bei der definierten Aussage
$\bigwedge_{x}$	für alle x gilt . . . ; Allquantor als generalisierte Konjunktion
$\bigvee_{x}$	es gibt (wenigstens) ein x mit . . . ; Existenzquantor als generalisierte Disjunktion

Tafel logischer Symbole

Eine erste Anwendung dieser Symbolik bieten die Teilmengen- und Gleichheitsbeziehung zwischen Mengen. Näheres zur Logik siehe 1.8.4.

Definition

Gehören alle Elemente einer Menge A zugleich einer Menge B an, so heißt A *Teilmenge* von B und man schreibt $A \subset B$:

$$\boxed{A \subset B :\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in G} (x \in A \rightarrow x \in B)}$$ [1]

Bei anschaulicher Darstellung der Teilmengenbeziehung (Inklusion) mit einem

[1] Lies: Für alle x der Grundmenge G gelte: Wenn x Element von A ist, dann soll x auch Element von B sein. Für diesen Sachverhalt werde vereinbarungsgemäß gesagt: „A ist Teilmenge von B“ und „$A \subset B$“ geschrieben.

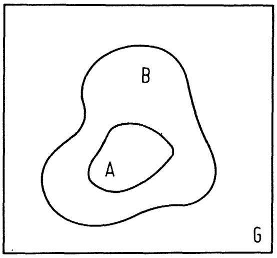


Abb. 1

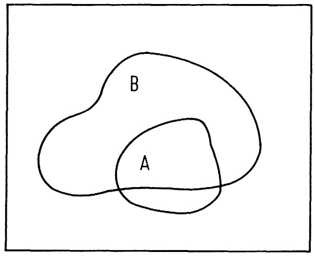


Abb. 2

VENN- Diagramm[2] (Abb. 1) erkennt man: alle Punkte innerhalb der Begrenzungslinie von A (d.s. alle $x \in A$) liegen auch innerhalb der Umrandung von B (d.s. alle $x \in B$). Die Grundmenge G ist als rechteckige Begrenzung gezeichnet. Stets sind alle betrachteten Mengen Teilmengen der Grundmenge.

Die Negation der Teilmengenbeziehung bedeutet: A ist nicht Teilmenge von B, in Zeichen: $A \not\subseteq B$, wenn nicht alle Elemente von A auch zu B gehören, wenn es also mindestens ein Element von A gibt, das nicht zugleich Element von B ist (Abb. 2):

$$A \not\subseteq B :\Leftrightarrow \bigvee_{x \in G} (x \in A \wedge x \notin B)$$

Definition

Zwei Mengen A, B heißen *gleich*, in Zeichen $A = B$, wenn beide Mengen die gleichen Elemente besitzen:

$$\boxed{A = B :\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in G} (x \in A \leftrightarrow x \in B)}$$

Die beiden wichtigsten Konsequenzen dieser Erklärung sind:

(1) Bei der Aufzählung der Elemente einer Menge ist deren Reihenfolge belanglos. Beispiele:

$$\{1, 9, 7, 6, 4\} = \{1, 4, 7, 6, 9\}$$

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

---

[2] John Venn (1834–1923), englischer Philosoph und Logiker. Die nach ihm benannten Diagramme sind indes eine Entdeckung von Leonhard Euler (1707–1783), der in seinen „Briefen an eine deutsche Prinzessin" bereits 1760 damit die Syllogismen der Prädikatenlogik anschaulich erklärte.

(2) Es genügt, jedes Element nur einmal zu nennen. Wiederholungen sind überflüssig. Beispiele:

$$\{1, 1, 4, 4, 4, 5\} = \{1, 4, 5\}$$
$$\{a, a\} = \{a\}$$

Der Leser beachte besonders den *Zusammenhang* zwischen Mengen und Prädikaten:

$$A = \{x \mid Px\}, \quad B = \{x \mid Qx\}, \quad C = \{x \mid Rx\}$$

$A \subset B$ entspricht der prädikatenlogischen Implikation $Px \Rightarrow Qx$
$B = C$ entspricht der prädikatenlogischen Äquivalenz $Qx \Leftrightarrow Rx$

Exemplarisch: Px: x ist durch 4 teilbar
Qx: x ist durch 2 teilbar
Rx: x ist eine gerade Zahl

Satz

| Die Mengengleichheits-Relation ist eine „Äquivalenzrelation"

Beweis (vgl. 1.2.3): Die Gleichheitsbeziehung ist sicher

reflexiv: $A = A$
symmetrisch: $A = B \Rightarrow B = A$
transitiv: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

Genau diese drei Eigenschaften bestimmen aber eine Äquivalenzrelation.

Satz

| Die Teilmengenrelation ist eine „Ordnungsrelation".

Beweis (vgl. 1.2.4): Die Teilmengenbeziehung ist sicher

reflexiv: $A \subset A$
identitiv: $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$
transitiv: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

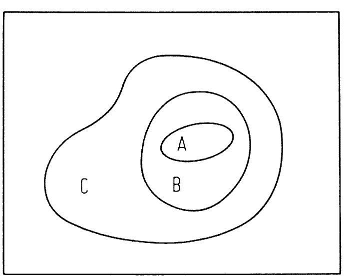


Abb. 3

Die letzte Eigenschaft kann auch unmittelbar aus dem VENN-Diagramm der Abb. 3 abgelesen werden. Damit ist „$\subset$" als Ordnungsrelation bereits nachgewiesen.

Satz

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Beweis (indirekt): Wir nehmen das Gegenteil der Behauptung an und zeigen dessen Unmöglichkeit, indem wir auf einen Widerspruch schließen[1]. Die Annahme lautet hier: es gibt eine Menge M mit $\emptyset \not\subset M$. Dann muß aber

$$\bigvee_{x \in G} (x \in \emptyset \wedge x \notin M)$$

gelten. Mit $x \in \emptyset$ ist jedoch der Widerspruch (zur Definition der leeren Menge) bereits gefunden.

Beispiel

Es sei M die Belegschaft eines Betriebes, M_1 die Menge der männlichen, M_2 die Menge der weiblichen Betriebsangehörigen. Dann gilt *stets* $M_1 \subset M$ und $M_2 \subset M$. Arbeiten im Betrieb nur Männer, so ist $M_1 = M$, $M_2 = \emptyset$, ohne daß die Teilmengenbeziehungen verletzt würden.

Definition

Die Menge P(M) aller Teilmengen einer Menge M,

$$P(M) = \{X \mid X \subset M\}$$

heißt die *Potenzmenge* von M.

Man beachte, daß die Elemente der Potenzmenge *Mengen* sind. Das ist zulässig, denn wir hatten bei der Erklärung des Mengenbegriffs keine Einschränkung hinsichtlich der Art der Elemente (Objekte) getroffen. Mitunter werden solche Mengen, deren Elemente selbst wieder Mengen sind, „Mengensysteme" genannt.

Satz

Ist M eine endliche Menge und bezeichnet $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente (Mächtigkeit von M), so gilt für die Elementeanzahl der Potenzmenge

$$|P(M)| = 2^{|M|}$$

[1] Dem liegt die stets und stillschweigend geltende logische Voraussetzung zu Grunde, daß es keine Alternative zu den beiden Möglichkeiten „eine Aussage ist wahr" und „eine Aussage ist falsch" gibt (sogenanntes „tertium non datur": Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten).